



TEKNIK MANIPULASI ALJABAR PADA TRANSFORMASI OPS

Ahmad Lazwardi*¹, Moch. Idris²

¹Universitas Muhammadiyah Banjarmasin, Banjarmasin, Indonesia

²Universitas Lambung Mangkurat, Banjarbaru, Indonesia

*Penulis Korespondensi (lazwardiahmad@gmail.com)

Abstrak: Transformasi Ops merupakan teknik manipulasi aljabar yang mengawankan setiap barisan bilangan real kepada fungsi pembangkitnya. Transformasi Ops mengubah bentuk deret kuasa dari suatu transformasi Ops kepada bentuk aljabar yang lebih sederhana dengan mengabaikan beberapa variabel yang sifatnya tetap. Perubahan bentuk aljabar melahirkan beberapa sifat dan aturan aljabar. Penelitian ini mencoba mengembangkan teori terkait sifat-sifat tersebut dan bagaimana korelasinya antara satu dengan lainnya. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Hasil penelitian ini adalah pengembangan teorema manipulasi variabel pada transformasi Ops dan manipulasi variabel pada transformasi Ops tipe-c.

Kata kunci: Transformasi Ops Tipe-c, Deret Kuasa, Fungsi Pembangkit Biasa

Abstrak: Ops transformation is an algebraic manipulation technique that associates each sequence of real numbers with its generating function. Ops transformation changes the power series form of an Ops transformation to a simpler algebraic form by ignoring some variables that are fixed. The change in algebraic form gives rise to several algebraic properties and rules. This study attempts to develop a theory related to these properties and how they correlate with each other. The research method used is literature study. The results of this study are the development of variable manipulation theorems in Ops transformation and variable manipulation in c-type Ops transformation.

Keywords: Type-c Ops Transformation, Power Series, Ordinary Generating Function

PENDAHULUAN

Fungsi pembangkit biasa adalah salah satu penemuan paling penting dan berguna dalam matematika diskrit. Fungsi pembangkit memainkan peran penting dalam matematika seperti menyelesaikan relasi rekursif, menyelesaikan beberapa macam persamaan diferensial, menghitung nilai konvergensi suatu deret, menyederhanakan suatu bentuk fungsi dan sebagainya (Wilf, 2017).

Menghitung dan memanipulasi fungsi pembangkit tidaklah selalu mudah. Semakin kompleks suatu permasalahan maka akan semakin sulit untuk dimanipulasi. Masih kurangnya teori yang menemukan metode penghitungan deret pangkat biasa (Lazwardi 2021). Ada banyak variabel dan indeks yang terlibat dalam bentuk umum deret pangkat. Bentuk deret pangkat yang paling sederhana adalah bentuk:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

Persamaan yang lebih kompleks berbentuk:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\gamma(x) - c)^n$$

Jika diperhatikan pada bentuk di atas, didapatkan beberapa variabel yang terlibat. Variabel tersebut adalah x , n , a_n , dan c . Dalam konteks tertentu, beberapa variabel ada yang dipandang sebagai variabel yang tetap (fixed). Variabel yang dianggap fix ini akan lebih efektif jika tidak selalu dituliskan pada setiap persamaan yang diberikan, namun menghilangkan suatu variabel akan membutuhkan suatu formulasi khusus yang mengaturnya secara eksak. Lazwardi (2021) dalam penelitiannya berhasil merumuskan suatu formulasi matematis yang disebut sebagai transformasi Ops sebagai berikut:

Definisi 1. *Transformasi Ops didefinisikan sebagai pemetaan.*

$$Ops: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

dengan

$$Ops(\{a_n\})(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(1)

Pemetaan di atas well defined karena adanya korespondensi satu-satu antara barisan bilangan real dengan deret kuasanya. Lebih jauh, daerah asal dari pemetaan tersebut bukan merupakan himpunan kosong karena setiap deret kuasa mempunyai radius konvergensi. Wilf (2017) menjelaskan bahwa terdapat korespondensi antara suatu barisan bilangan real dengan fungsi pembangkit biasanya yang berbentuk deret kuasa.

Dengan pendefinisian di atas, kita telah berhasil mengubah bentuk deret kuasa ke dalam bentuk fungsi. Mengeliminasi indeks n dan simbol tak hingga (Saberi Nik and Soleymani 2013). Struktur aljabar yang berlaku pun akan berubah dari aljabar deret kuasa

menjadi aljabar fungsi. Penulisannya pun menjadi lebih simpel, untuk menulis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

kita hanya perlu menulis $Ops(\{a_n\})$ saja. Berikut adalah beberapa sifat dari transformasi Ops:

Teorema 2. *Untuk setiap $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $Ops(\{0, a_0, a_1, \dots\}) = xOps(\{a_n\})$*

Bukti: Untuk setiap x diperoleh persamaan.

$$\begin{aligned} xOps(\{a_n\})(x) &= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 x + a_1 x^2 + \dots \\ &= 0 + a_0 x + a_1 x^2 + \dots \\ &= Ops(\{0, a_0, a_1, \dots\}) \end{aligned}$$

Secara induksi teorema 2 dapat diperumum menjadi:

Akibat 3. Untuk setiap $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $Ops\left(\left\{\underbrace{0,0,\dots,0}_{k\text{-terms}}, a_0, a_1, \dots\right\}\right) = x^k Ops(\{a_n\})$

Selanjutnya dapat dilakukan suatu aturan sejenis pengurangan suku tertentu pada suatu deret kuasa dapat menjadikan transformasi Ops menjadi bentuk berikut (Salwa, Aini, and Switrayni 2022).

Teorema 4. Untuk setiap $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $Ops(\{a_n\}) - a_0 = xOps(\{a_{n+1}\})$.

Proof: Untuk setiap x yang merupakan anggota domain dari transformasi Ops, didapatkan:

$$\begin{aligned} Ops(\{a_n\})(x) - a_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^n \\ &= xOps(\{a_{n+1}\})(x). \end{aligned}$$

Secara induktif diperoleh aturan yang lebih umum sebagai berikut:

Akibat 5. Untuk setiap $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, berlaku $Ops(\{a_n\}) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n = x^k Ops(\{a_{n+k}\})$

Konsekuensi lainnya diperoleh:

Akibat 6. Untuk setiap $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $Ops(\{a_{n+k}\}) = \frac{Ops(\{a_n\}) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n}{x^k}$, $x \neq 0$

Ops transformation ternyata gagal untuk bisa dipandang sebagai fungsi linear dari $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$ karena $\mathbb{R}^*$ karena $Ops(\{a_n\})(x + y)$ tidak selalu menghasilkan $Ops(\{a_n\})(x) + Ops(\{a_n\})(y)$. Tetapi jika x dianggap sebagai variabel yang tetap atau jika dipandang Transformasi Ops sebagai penjumlahan dua fungsi riil, maka kita akan mendapatkan hasil berikut (Lazwardi 2021)

$$Ops(\{a_n\} + \{b_n\})(x) = Ops(\{a_n\})(x) + Ops(\{b_n\})(x)$$

Dengan memandang Transformasi Ops Sebagai fungsi riil, kita bisa tunjukkan bahwa:

$$Ops(\{a_n\} + \{b_n\}) = Ops(\{a_n\})(x) + Ops(\{b_n\})$$

Untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ sifat linear kedua juga ternyata berlaku:

$$Ops(\alpha\{a_n\}) = \alpha Ops(\{a_n\})$$

Sifat lainnya yang menjadi teorema penting dalam penggunaan Transformasi Ops adalah sifat dari konvolusi barisan sebagai berikut (Al Khawaja and Al-Mdallal 2018)

Teorema 7. Untuk setiap $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ berlaku.

$$Ops(\{a_n\})Ops(\{b_n\}) = Ops\left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right).$$

Penemuan lainnya adalah tentang turunan dari transformasi Ops sebagai berikut

Definisi 8. Diberikan $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dan c adalah titik interior pada daerah asal dari $Ops(\{a_n\}): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Didefinisikan:

$$D_x Ops(\{a_n\})(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{Ops(\{a_n\})(x) - Ops(\{a_n\})(c)}{x - c}$$

Definisi di atas tidak lain adalah merupakan definisi turunan fungsi riil seperti biasa. Definisi di atas menghasilkan teorema-teorema berikut (Wilf 2017).

Teorema 9. Jika $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, maka $D_x Ops(\{a_n\}) = Ops(\{(n+1)a_{n+1}\})$

Akibat 10. Jika $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, maka:

$$D_x^k Ops(\{a_n\}) = D_x(D_x(\dots(D_x Ops(\{a_n\}))) = Ops\left(\left\{\frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}\right\}\right).$$

Teorema 11. Jika $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, maka $x D_x Ops(\{a_n\}) = Ops(\{n a_n\})$

Corollary 3.12. Jika $\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, maka:

$$Ops(\{n^k a_n\}) = \underbrace{x D_x (x D_x (\dots x D_x Ops(\{a_n\})))}_{k \text{ times}}.$$

Dalam penelitian lainnya Lazwardi (2022) berhasil merumuskan formulasi transformasi yang lebih umum yang dinamakan sebagai transformasi Ops tipe-c sebagai berikut

Definisi 12. Diberikan suatu bilangan riil c didefinisikan Transformasi Ops tipe-c sebagai:

$$Ops^c(\{a_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

Dapat diperhatikan, dengan formulasi transformasi Ops tipe-c di atas, sekarang transformasi Ops bisa digunakan untuk sebarang deret Taylor (Lazwardi, Ariyanti, and Djamilah 2022).

Transformasi Ops tipe-c ternyata dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan persamaan differensial koefisien variabel. Sebagai contoh, persamaan differensial koefisien variabel berikut:

$$y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$$

di sekitar titik $c = 1$.

Persamaan Differensial di atas bisa diselesaikan menggunakan Transformasi Ops tipe-1 sebagai berikut (Hycienth, Michael, and Paul 2016):

Step 1: Dimisalkan solusi dari persamaan differensial di atas berbentuk

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-1)^n = Ops^1(\{C_n\}).$$

Step 2: Ubahlah bentuk persamaan differensial di atas ke dalam bentuk transformasi Ops tipe-1 sebagai berikut.

$$D_x^2 Ops^1(\{C_n\}) - 2(x-1)D_x Ops^1(\{C_n\}) + 2Ops^1(\{C_n\}) = Ops^1(\{0\})$$

Step 3: Selesaikan persamaan di atas

$$\begin{aligned} D_x^2 Ops^1\{C_n\} - 2(x-1)D_x Ops\{C_n\} + 2Ops\{C_n\} \\ = Ops^1\{(n+2)(n+1)C_{n+2}\} - Ops^1\{2nC_n\} + Ops^1\{2C_n\} \\ = Ops^1\{(n+2)(n+1)C_{n+2} - 2nC_n + 2C_n\} \\ = Ops^1\{0\} \end{aligned}$$

Step 4: Hilangkan transformasi Ops nya diperoleh.

$$(n+2)(n+1)C_{n+2} = (2n-2)C_n \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

Step 5: Dengan mengevaluasi n satu persatu, diperoleh solusi.

$$y = C_0 \left(1 - (x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^4 + \dots \right) + C_1(x-1)$$

Terlihat bahwa penyelesaian PD di atas menjadi lebih sederhana karena hanya memanfaatkan sifat aljabar dari transformasi Ops saja tanpa melibatkan sifat-sifat kalkulus dari deret kuasa (Area and Nieto 2021).

Permasalahan yang muncul terkait deret kuasa masih sangat bervariasi, salah satunya adalah ketika pangkat dari variabel x pada deret kuasa yang tidak lagi berpangkat n tetapi berpangkat $2n$ atau $3n$ dan seterusnya seperti deret kuasa berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

Bentuk di atas sama sekali tidak tercover oleh bentuk transformasi Ops baik dalam bentuk dasarnya maupun bentuk transformasi Ops tipe-c nya (Robin 2014). Untuk itu penelitian ini bertujuan untuk memberikan formulasi sekaligus solusi dari permasalahan di atas

METODE

Metode penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Pertama akan didefinisikan bentuk transformasi operasi yang lebih umum. Setelah itu akan ditemukan beberapa hasil dasar dari definisi baru kita. Kami akan menggunakan hasil tersebut untuk memperluas teori transformasi operasi. Selanjutnya kita akan memastikan bahwa definisi transformasi operasi kita sebelumnya menjadi kasus khusus untuk definisi baru kita. Selanjutnya kita akan menemukan beberapa teorema mengenai sifat transformasi baru kita. Kami juga akan memastikan bahwa definisi baru kami dapat diterapkan lebih luas dibandingkan definisi kami sebelumnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut akan diformulasikan bentuk baru dari transformasi Ops yang disebut sebagai bentuk manipulasi variabel:

Definisi 13 (Manipulasi Variabel) Diberikan $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $y = f(x)$ suatu fungsi riil yang analitik di 0. Didefinisikan:

$$Ops_y(\{a_n\})(x) = Ops(\{a_n\})(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n(x) = A(y) = A(f(x)).$$

Perhatikan bentuk manipulasi variabel dari transformasi Ops di atas menyematkan fungsi y terkait sebagai lower indeks. Berbeda dengan transformasi Ops tipe-c yang menyematkan variabel c sebagai upper indeks. Korelasi antar keduanya akan menjadi topik penelitian tersendiri selanjutnya.

Adalah hal bijak jika mempertanyakan apakah bentuk manipulasi variabel di atas akan selalu *well defined* pada setiap deret kuasa atau ada batasan tersendiri (Anon 2016). Teorema berikut akan menjadi *clue* yang baik dari pertanyaan di atas.

Teorema 14 Diberikan $\{a_n\}$ suatu barisan dan $y = f(x)$ suatu fungsi yang analitik di 0. Jika $Ops(\{a_n\})$ mempunyai interval konvergensi $\alpha < x < \beta$ maka $Ops_y(\{a_n\})$ mempunyai interval konvergensi $\alpha < f(x) < \beta$, asalkan $(\alpha, \beta) \subseteq Rf$.

Contoh:

Diberikan $y = 2x + 1$ dan $Ops(\{1\})(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Diperoleh:

$$Ops_y(\{1\})(x) = Ops_{2x+1}(\{1\})(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x+1)^n = \frac{1}{1-(2x+1)} = -\frac{1}{2x}$$

Mempunyai interval konvergensi $-1 < 2x + 1 < 1$ atau $-1 < x < 0$.

Diberikan $y = x^2$ dan $Ops\left(\left\{\frac{1}{n!}\right\}\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Diperoleh:

$$Ops_y\left(\left\{\frac{1}{n!}\right\}\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2}$$

Sebagai konsekuensi dari pendefinisian bentuk manipulasi variabel dari transformasi Ops, dihasilkan sifat-sifat baru dari transformasi Ops yang dipaparkan dalam bentuk teorema-teorema berikut (Bliss and Verschelde 2018).

Teorema 15 $Ops(\{(-1)^n a_n\}) = Ops_{-x}(\{a_n\})$

Bukti: Diperhatikan hal berikut.

$$Ops(\{(-1)^n a_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n = Ops_{-x}(\{a_n\})$$

Teorema 16 $Ops(\{\alpha^n a_n\}) = Ops_{\alpha x}(\{a_n\})$

Bukti: Diperhatikan hal berikut.

$$Ops(\{\alpha^n a_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha x)^n = Ops_{\alpha x}(\{a_n\})$$

Sifat-sifat bentuk manipulasi variabel dari transformasi Ops terkait turunan dijelaskan pada teorema-teorema berikut.

Teorema 17 $Ops_y\{(n+1)a_{n+1}\} = D_x Ops(\{a_n\})(y)$

Bukti: Diperhatikan hal berikut.

$$Ops_y(\{(n+1)a_{n+1}\}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(f(x))^n$$

Bentuk di atas dapat dipandang sebagai komposisi dari dua fungsi, sehingga bentuk di atas menjadi:

$$Ops_y(\{(n+1)a_{n+1}\}) = Ops(\{(n+1)a_{n+1}\}) \circ f = D_x Ops(\{a_n\}) \circ f = D_x Ops(\{a_n\})(y)$$

Teorema berikut dapat dibuktikan secara analog

Teorema 18 $D_x Ops_y(\{a_n\}) = D_x Ops(\{a_n\})(y) D_x y$

Teorema 19 $Ops_y \{(n)a_n\} = xD_x Ops(\{a_n\})(y)$

Teorema 20 $Ops_y (\{n^k a_n\}) = xD_x (xD_x (...) xD_x Ops(\{a_n\}))(y)$
 k faktor

PENUTUP

Bentuk manipulasi variabel transformasi Ops didefinisikan sebagai:

Definisi 13 (Manipulasi Variabel) Diberikan $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $y = f(x)$ suatu fungsi riil yang analitik di 0. Didefinisikan:

$$Ops_y (\{a_n\})(x) = Ops(\{a_n\})(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n(x) = A(y) = A(f(x)).$$

Sifat-sifat manipulasi variabel adalah:

Teorema 15 $Ops(\{(-1)^n a_n\}) = Ops_{-x}(\{a_n\})$

Teorema 16 $Ops(\{\alpha^n a_n\}) = Ops_{\alpha x}(\{a_n\})$

Teorema 17 $Ops_y (\{(n+1)a_{n+1}\}) = D_x Ops(\{a_n\})(y)$

Teorema 18 $D_x Ops_y (\{a_n\}) = D_x Ops(\{a_n\})(y) D_x y$

Teorema 19 $Ops_y (\{na_n\}) = xD_x Ops(\{a_n\})(y)$

Teorema 20 $Ops_y (\{n^k a_n\}) = xD_x (xD_x (...) xD_x Ops(\{a_n\}))(y)$
 k faktor

DAFTAR RUJUKAN

- Al Khawaja, U., & Al-Mdallal, Q.M. (2018). Convergent Power Series of $\text{Sech}[\frac{1}{2}x]$ (x) and Solutions to Nonlinear Differential Equations. *International Journal of Differential Equations*, 20(1), 1–10.
- Anon. (2016). The Frobenius Method for Solving Ordinary Differential Equation with Coefficient Variable. *International Journal of Science and Research (IJSR)*, 5(7), 22–35. doi: 10.21275/v5i7.ART2016719.
- Area, I., & Nieto, J.J. (2021). Power Series Solution of the Fractional Logistic Equation. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 573:125947.
- Bliss, Nathan, & Jan Verschelde. (2018). The Method of Gauss–Newton to Compute Power Series Solutions of Polynomial Homotopies. *Linear Algebra and Its Applications*, 542, 69–88.
- Hycienth, Orapine, Michael, T., & Paul, A. (2016). Solving Ordinary Differential Equations Using Power Series.

- Lazwardi, A. (2021). Ops Transformation. *Journal of Mathematical Problems, Equations and Statistics*, 2(1), 75–81.
- Lazwardi, A., Ariyanti, I., & Djamilah, S. (2022). C-Type Ops Transformation. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*, 7(3), 401–10.
- Robin, W. (2014). Series Solution of Second-Order Linear Homogeneous Ordinary Differential Equations via Complex Integration. *International Mathematical Forum* 9, 967–76.
- Saberi Nik, H., & Soleymani, F. (2013). A Taylor-Type Numerical Method for Solving Nonlinear Ordinary Differential Equations. *Alexandria Engineering Journal*, 52(3), 543–50.
- Salwa, Aini, Q., & Switrayni, N.W. (2022). Beta-Dual Dari Ruang Barisan $(N, \Delta\lambda)$, $(N, \Delta\lambda)$ dan $(N, \Delta\lambda)$. *Jurnal Matematika*, 11(2), 119. doi: 10.24843/JMAT.2021.v11.i02.p141.
- Wilf, H.S. (2017). *Generating Functionology*. 2nd ed. Academia Press Inc.