



ANALISIS KESULITAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN PERMASALAHAN PENERAPAN INTEGRAL LIPAT TIGA PADA MATA KULIAH PEUBAH BANYAK

Ruth Helen Simarmata

Universitas Sriwijaya, Palembang, Indonesia

Penulis Korespondensi (ruthhelensimarmata@gmail.com)

Abstrak: Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis jenis kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan penerapan integral lipat tiga pada mata kuliah kalkulus Peubah Banyak. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif. Subjek penelitian adalah 94 orang mahasiswa semester empat tahun akademik 2023/2024 Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya. Teknik pengumpulan data yang digunakan yaitu tes, observasi, wawancara dan dokumentasi. Teknik analisis data dilakukan dengan analisis data kualitatif, yaitu reduksi data, penyajian data dan penarikan kesimpulan. Teknik keabsahan data menggunakan teknik triangulasi. Hasil penelitian diperoleh 4 jenis kesulitan mahasiswa, yaitu 1) kesulitan dalam menggambar daerah yang dibatasi, 2) kesulitan dalam menentukan batas integrasi, 3) kesulitan dalam mengintegrasikan dengan bentuk batas fungsi, 4) kesulitan dalam melakukan perhitungan.

Kata kunci: Kesulitan mahasiswa, Kalkulus Peubah Banyak, Penerapan Integral

Abstract: This research aims to analyze students' difficulties in solving problems applying triple integrals in the Multiple Variable Calculus course. This research is qualitative research. The research subjects were 94 students in the fourth semester of the 2023/2024 academic year of the Mathematics Education Study Program, Sriwijaya University. The data collection techniques used are tests, observation, interviews and documentation. The data analysis technique is carried out using qualitative data analysis, namely data reduction, data presentation and drawing conclusions. The data validity technique uses triangulation techniques. The research results showed that there were 4 types of student difficulties, namely 1) difficulty in drawing the area E , 2) difficulty in determining integration limits, 3) difficulty in integrating with function limit forms, 4) difficulty in carrying out calculations.

Keywords: Student difficulties, Calculus, Application of Calculus

PENDAHULUAN

Kalkulus menjadi bagian fundamental dari suatu bangunan matematika. Kalkulus sebagai ukuran perubahan fungsi dengan perubahan nilai input (Henra, 2021) memiliki perluasan satu variabel hingga ke multi variabel. Kalkulus juga membahas masalah linearisasi dan representasi geometri dalam pembelajaran dan pengajaran kalkulus multivariable dan analisisnya tidak terbatas pada kalkulus fungsi dua variabel (Harel, 2013). Dasar dan perluasan kalkulus menjadi salah satu bagian penting dalam pengetahuan

matematika murni ataupun matematika terapan. Penguasaan konsep kalkulus ini harus dilengkapi juga dengan kemampuan penyelesaian masalah-masalah kalkulus di bidang dua dimensi ataupun di bidang dengan dimensi yang lebih kompleks dengan menghubungkan konsep-konsep kalkulus. Namun hal ini masih menjadi suatu kendala terutama dalam penerapan konsep multivariabel kalkulus (Thompson, 2021). Dalam mengembangkan gagasan kalkulus secara bermakna harus mengembangkan landasan gagasan yang kuat dalam penalaran kuantitatif tentang kovariasi, laju perubahan, dan akumulasi. Mahasiswa harus memahami bagaimana konsep dalam ruang tiga dimensi sehingga dapat menerapkan konsep untuk menyelesaikan masalah dalam ruang tiga dimensi tersebut. Trigueros (2013) dan Harrel (2013) menyimpulkan bahwa memahami kalkulus fungsi satu variabel sangat penting untuk memahami kalkulus fungsi dua variabel, hal ini tidak berarti cukup untuk memahami dan menyelesaikan pada bidang yang terdiri dari representasi tiga dimensi.

Mata kuliah kalkulus peubah banyak menjadi salah satu mata kuliah yang dianggap cukup sulit untuk mahasiswa pada semester 4 (Noeruddin, 2014). Ada beberapa literatur yang membahas kesulitan mahasiswa dalam pembelajaran Kalkulus Multivariabel. Kesulitan mahasiswa dalam Kalkulus Peubah Banyak tidak sama dengan kesulitan mahasiswa dalam Kalkulus Dasar ataupun Kalkulus Lanjut. Kesulitan mahasiswa secara umum pada Kalkulus Peubah Banyak adalah terdapat pada topik tertentu, bagaimana menjawab soal-soal non-rutin, adanya latar belakang pengetahuan matematika yang buruk, pengaruh kemampuan dasar dan manipulasi aljabar yang buruk, serta keyakinan dan gaya belajar mahasiswa merupakan tantangan penting dalam pembelajaran Kalkulus Multivariabel (Kashefi, 2012).

Pada penelitian sebelumnya dibahas kesulitan belajar mahasiswa pada materi integral (Monariska, 2019), kesulitan belajar mahasiswa pada koordinat polar (Apriandi, 2016), kesulitan belajar mahasiswa dalam menyelesaikan soal kalkulus peubah banyak di Universitas Muhammadiyah Surakarta (Sholikah, 2017) dan di STKIP PGRI Pasuruan (Nurmalitasari, 2017). Hasil penelitian sebelumnya menunjukkan apa saja kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal kalkulus peubah banyak. Secara khusus, penelitian terkait kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan penerapan integral lipat tiga pada mata kuliah Kalkulus Peubah Banyak belum dilakukan.

Kalkulus Peubah Banyak adalah salah satu mata kuliah wajib yang terdapat pada semester empat pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Sriwijaya. Peneliti tertarik menganalisis bagaimana kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal dengan konsep penerapan integral lipat tiga sebagai salah satu materi yang kompleks dalam mata kuliah kalkulus peubah banyak. Penerapan konsep integral lipat tiga dapat menjadi indikator pemahaman dan koneksi konsep-konsep mata kuliah kalkulus secara keseluruhan.

METODE

Jenis penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif. Subjek penelitian sebanyak 94 orang merupakan mahasiswa semester empat tahun akademik 2023/2024 Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya. Teknik pengumpulan data yang digunakan yaitu 1. Tes, tes yang diberikan menyesuaikan dengan kurikulum Program Studi dengan outcome merujuk pada CPL mata kuliah pada Ujian Akhir Semester, 2) observasi, observasi dilakukan pada proses penyelesaian soal yang diberikan, 3) wawancara, proses wawancara dilakukan setelah proses evaluasi selesai. Dalam wawancara diajukan pertanyaan terkait kesulitan mahasiswa dan 4) Dokumentasi, data diperoleh berupa proses evaluasi pembelajaran.

Kemudian untuk teknik analisis data dilakukan dengan analisis data kualitatif, yaitu reduksi data, penyajian data dan penarikan kesimpulan. Teknik keabsahan data

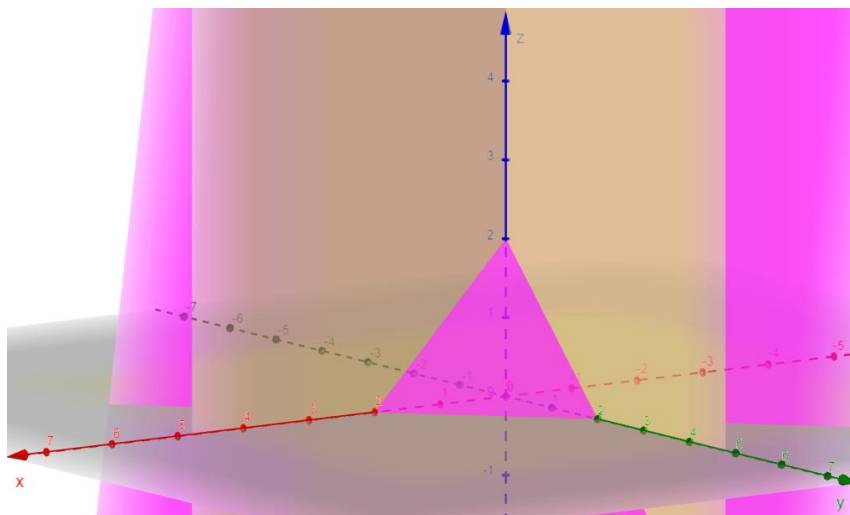
menggunakan Teknik triangulasi dan sumber. Teknik triangulasi dilakukan dengan cara menanyakan hal yang sama dengan teknik yang berbeda, yaitu dengan observasi, wawancara dan dokumentasi. Hal wawancara dan observasi menjadi data yang memperkuat hasil pengerjaan soal oleh mahasiswa.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Ujian Akhir Semester Mata Kuliah Kalkulus Peubah Banyak tahun akademik 2023/2024 Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya dengan tujuan pembelajaran yaitu menghubungkan konsep kalkulus multivariabel secara sistematis untuk menyelesaikan permasalahan pada Materi Integral lipat tiga terdapat soal penerapan integral lipat tiga sebagai berikut:

Hitunglah volume daerah E dengan menggunakan integral lipa tiga. Daerah E adalah tetrahedron pejal yang dibatasi oleh empat bidang $x = 0, y = 0, z = 0$ dan $x + y + z = 2$.

Pada soal ini diharapkan mahasiswa dapat menggambarkan fungsi-fungsi yang diberikan kemudian menggambarkan secara geometri daerah yang diharapkan kemudian memformulasikan daerah $E = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - x - y\}$.



Gambar 1 Daerah E

Dari pemahaman geometris dan aljabar tersebut dan menghubungkan definisi integral lipat tiga, mahasiswa diharapkan dapat menyelesaikan $\iiint_E z \, dV$ dengan memformulasikan batas-batas bidangnya

$$\iiint_E z \, dV = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} z \, dz \, dy \, dx$$

Setelah dirumuskan penyelesaian soal secara lengkap dan terstruktur Setelah mahasiswa mengerjakan tes, diperoleh kesalahan-kesalahan umum pada tabel 1 berikut.

Tabel 1 Kesalahan dan kesulitan mahasiswa

No.	Kesalahan yang terjadi	Kesulitan Mahasiswa
1.	Kesalahan dalam menghubungkan konsep untuk memformulasikan E	Menggambaran titik potong dari bidang-bidang tetrahedron Menentukan daerah dan batas integrasi dalam bentuk aljabar
2.	Kesalahan dalam menerapkan konsep integral lipat tiga	Mengintegralkan dengan bentuk batas fungsi Menghitung integral lipat tiga

Hasil pengelompokkan berdasarkan kesalahan dan kesulitan dalam menyelesaikan permasalahan penerapan kalkulus peubah banyak tersebut menggambarkan hasil analisis secara keseluruhan yang dijelaskan melalui masing-masing subjek penelitian sebagai berikut:

Subjek 1

Subjek 1 tidak menggambarkan fungsi-fungsi yang diberikan secara geometri namun memformulasikan daerah $E = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - x - y\}$ Berikut adalah hasil pekerjaan subjek 1.

$x+y+z=2$
 $z = -x-y+2$
 $= \frac{1}{2}(-2x-2y+4)$

bidang $2x+2y-4$ memotong bidang $x+y+z=2$ sehingga
 $2x+2y-4=0$
 $2y = -2x+4$
 $y = \frac{-2x+4}{2}$
 $z = -x+2$

diperoleh intervalnya
 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq (-x+2), 0 \leq z \leq 2$

$$\int_0^2 \int_0^{-x+2} \int_0^{-x+2} (-2x-2y+4) dx dy dz$$

$$\int_0^2 \int_0^{-x+2} \frac{1}{2} [-x^2 - 2yx + 4x]_0^2 dy dz$$

$$\int_0^2 \int_0^{-x+2} \frac{1}{2} [(4x^2) - 2y(x) + 4(x) - (0)] dy dz$$

$$\int_0^2 \int_0^{-x+2} \frac{1}{2} [4x^2 - 4y + 4] dy dz$$

$$\int_0^2 \int_0^{-x+2} [-4y + 12] dy dz$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2} [-2y^2 + 12y]_0^{-x+2} dz$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2} [(-2(-x+2)^2 + 12(-x+2)) - 0] dz$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2} [-2(x^2 - 4x + 4) + 12(-x+2)] dz$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2} [-2x^2 + 8x - 8 + 12x + 24] dz$$

$$\int_0^2 \frac{1}{2} [-2x^2 - 4x + 16] dz$$

$$= \frac{1}{2} [-2x^2 z - 4xz + 16z]_0^2$$

$$= \frac{1}{2} [(-2x^2(2) - 4x(2) + 16(2)) - 0]$$

$$= \frac{1}{2} [-4x^2 - 8x + 32]$$

$$= -2x^2 - 4x + 16$$

Gambar 2 Hasil pekerjaan subjek 1

Dari hasil pengerjaan subjek 1 pada gambar 2 dapat dideskripsikan kesalahan dan kesulitan yang dilakukan oleh subjek 1 dalam mengerjakan soal sebagai berikut.

Tabel 2 Hasil Analisis Tes dan Wawancara Subjek 1

	Kesalahan yang terjadi	Kesulitan dari hasil tes	Kesulitan dari wawancara
1.	Tidak menentukan titik potong dan menentukan batas bidang	Kesulitan menentukan bidang-bidang dari tetrahedron	Kesulitan menentukan daerah
2.	Kesalahan dalam menentukan daerah E	Kesulitan dalam menentukan batas integrasi	Kesulitan membayangkan batas daerah yang dibatasi Kesulitan membayangkan daerah yang dibatasi untuk dijadikan batas atas dan batas bawah
3.	Kesalahan menuliskan batas daerah	kesulitan dalam menentukan batas atas dan batas bawah	Kurang teliti dalam melakukan perhitungan
4.	Kesalahan dalam melakukan perhitungan integral lipat tiga	Kesulitan untuk mengintegalkan dengan benar	

Subyek 1 menunjukkan kesalahan dalam pengerjaan kalkulus yaitu kesalahan dalam memformulasikan daerah dari fungsi yang diberikan, kemudian tidak menuliskan batas integrasi dengan benar dan tidak melakukan perhitungan integrasi dengan tepat yang merupakan kesalahan prosedural (Nasution, 2018). Hal ini terjadi dalam penerapan konsep kalkulus peubah banyak pada materi yang lainva (Apriandi, 2016). Hal ini terindikasi bahwa mahasiswa kurang memahami konsep yang berhubungan dengan materi prasyarat (Dewi, 2014) yaitu menggambarkan benda di ruang tiga dimensi menentukan batas daerah dalam bentuk aljabar dan menerapkan definisi integral. Kalkulus sebagai salah satu cabang matematika yang melibatkan penghitungan perubahan sesaat, yang disebut kalkulus diferensial; penghitungan jumlah banyak faktor kecil untuk menentukan keseluruhan, yang disebut kalkulus integral (Berggren, 2016).

Konsep kalkulus peubah banyak terkait dengan kalkulus dasar dan kalkulus lanjut. Untuk dapat memahami kalkulus peubah banyak dengan baik dibutuhkan pemahaman konsep kalkulus secara umum dengan baik pula. Hal ini selaras dengan pendapat dibutuhkan pemahaman yang kuat tentang materi kalkulus (Aprizal, 2024). Kesulitan dalam memecahkan permasalahan pada konsep turunan dan integral berkaitan erat dengan sudut pandang mahasiswa, sudut pandang mahasiswa akan meningkatkan atau melemahkan motivasi mahasiswa dalam mempelajari dan memecahkan masalah kalkulus (Farhan, 2019). Mahasiswa yang berasumsi konsep dan soal sulit akan lebih cenderung lemah motivasinya dalam mempelajari dan memecahkan masalah kalkulus.

Subjek 2

Subjek 2 tidak menggambarkan fungsi-fungsi yang diberikan secara geometri namun memformulasikan daerah $E = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - x - y\}$. Berikut adalah hasil pekerjaan subjek 1. Terdapat kesalahan konsep dan perhitungan prosedural yang dilakukan oleh subjek 2. Dari hasil pengerjaan subjek 2 pada gambar 3 dapat dideskripsikan kesalahan dan kesulitan yang dilakukan oleh subjek 2 sebagai berikut.

Tabel 3 Hasil Analisis Tes dan Wawancara Subjek 1

	Kesalahan yang terjadi	Kesulitan dari hasil tes	Kesulitan dari wawancara
1.	Tidak menggambarkan batas daerah E	Kesulitan menentukan bidang-bidang tetrahedron	Kesulitan menentukan batas dari daerah yang dimaksud
2.	Tidak menentukan daerah E secara aljabar	Kesulitan dalam menentukan batas integrasi dalam bentuk aljabar	Tidak bisa membayangkan daerah yang dibatasi
3.	Kesalahan memformulasikan batas daerah	kesulitan menentukan batas atas dan batas bawah	Membayangkan bidang yang dibatasi pada interval $[0,2]$
4.	Kesalahan dalam melakukan perhitungan integral lipat tiga	Kesulitan untuk mengintegrasikan	Ragu dengan jawaban yang dituliskan

Berikut adalah hasil pekerjaan oleh subjek 2.

Handwritten mathematical work for a triple integral problem. The student is calculating the volume of a tetrahedron defined by the plane $x+y+z=2$ in the first octant. The work shows the setup of the triple integral and several steps of integration, but contains several errors. Two red boxes highlight specific mistakes: the first box is around the limits of integration for the innermost integral (y from 0 to 2-x), and the second box is around the final result, which is incorrectly calculated as 0.

Gambar 3 Hasil pekerjaan subjek 2

Subyek 2 menunjukkan kesalahan sebagai berikut tidak menggambar daerah dari fungsi yang diberikan secara tepat, tidak menuliskan batas integrasi dengan benar dan tidak melakukan perhitungan integrasi dengan benar (Apriandi, 2016). Ini disebabkan oleh hubungan antara bentuk visual dari daerah tetrahedron dengan bidang-bidang yang membatasi sebagai bagian dari sumbu x, y, z belum dipahami dengan benar. Hal ini juga terindikasi karena kurang memahami yang berhubungan dengan materi prasyarat (Dewi, 2014). Bentuk aljabar E terkait dengan pemahaman notasi dan kaitannya dengan bidang serta benda tetrahedro sebagai daerah pada bidang tiga dimensi. Hal ini selaras dengan pendapat bahwa memiliki pemahaman yang kuat tentang materi kalkulus dibutuhkan (Aprizal, 2024). Selain itu ditemukan nilai akhir 0 yang mengindikasikan bahwa kurangnya

ketelitian dan kurangnya pemahaman luas daerah di bawah kurva maka terjadi kekeliruan dari perhitungan bahwa volume daerah yang diberikan bernilai akhir 0 (Salsabila, 2022).

Pemahaman luas daerah di bawah kurva merupakan konsep dasar yang penting dalam perhitungan daerah dibawah kurva satu variabel atau lebih. Nilai luas daerah di bawah kurva nilai negatif dan nilai 0 memiliki pengertian yang berbeda. Subjek 2 kurang peka pada kesalahan ini bahwa nilai yang diperoleh salah sehingga tidak mengecek kembali daerah yang dihitung ataupun batas-batas dari daerah yang dihitung. Kesulitan dalam memecahkan masalah turunan dan integral ini juga berkaitan erat dengan sudut pandang mahasiswa dalam melihat materi atau masalah yang dibahas, sudut pandang dapat meningkatkan atau melemahkan motivasi mahasiswa dalam mempelajari dan memecahkan masalah berbanding lurus dengan sudut pandang terhadap kesulitan konsep atau masalah (Farhan, 2019).

Subjek 3

Berikut adalah hasil pekerjaan subjek 3.

Jawab :

3D plot of a tetrahedron with vertices $(0,0,2)$, $(2,0,0)$, and $(0,2,0)$. The plane equation is $x+y+z=2$.

Triple integral calculation:

$$\iiint_R z \, dV$$

$$= \int_{-2}^{2-x-y} \int_{-2}^{2-x-y} \int_{-2}^{2-x-y} z \, dz \, dx \, dy$$

$$= \int_{-2}^{2-x-y} \int_{-2}^{2-x-y} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{-2}^{2-x-y} dx \, dy$$

$$= \int_{-2}^{2-x-y} \int_{-2}^{2-x-y} \frac{1}{2} (2-x-y)^2 - \frac{1}{2} (-2)^2 dx \, dy$$

$$= \int_{-2}^{2-x-y} \int_{-2}^{2-x-y} \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + xy - 2y - 2x \, dx \, dy$$

Integration steps (shown in red boxes):

$$= \int_{-2}^{2-x-y} \left[\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} y^2 x + \frac{1}{2} x^2 y - 2xy - x^2 \right]_{-2}^{2-x-y} dy$$

$$= \int_{-2}^{2-x-y} \left(\frac{1}{6} (2-y-z)^3 + \frac{1}{2} y^2 (2-y-z) + \frac{1}{2} (2-y-z)^2 y - 2(2-y-z)y - (2-y-z)^2 \right) - \left(\frac{1}{6} (-2)^3 + \frac{1}{2} y^2 (-2) + \frac{1}{2} (-2)^2 y - 2(-2)y - (-2)^2 \right) dy$$

$$= \int_{-2}^{2-x-y} \left(\frac{1}{6} (-y^3 - z^3 - 3y^2 z - 3yz^2 + 6y^2 + 6z^2 + 12yz - 12z + 8) + y^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{3} y - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} z^2 y + y^2 z - 2y^2 - 2yz + 2y - 4y + 2y^2 + 2yz \right. \\ \left. - (-\frac{1}{6} + z^2 + 2yz - 4z + 4) \right) - \left(\frac{8}{6} + y^2 + 2y - 4y - 4 \right) du$$

Gambar 4 Hasil pekerjaan subjek 3

Berikut adalah hasil pengerjaan subjek 3 pada gambar 4 dapat dideskripsikan kesalahan dan kesulitan yang dilakukan oleh subjek 3 sebagai berikut.

Tabel 4 Hasil Analisis Tes dan Wawancara Subjek 3

	Kesalahan yang terjadi	Kesulitan dari hasil tes	Kesulitan dari wawancara
1.	Mengambarkan batas daerah E dengan benar	Kesulitan menghubungkan bidang-bidang dari tetrahedron menjadi batas integral	Kesulitan menentukan batas dari daerah
2.	Tidak menentukan daerah E secara aljabar	Kesulitan dalam menentukan dalam bentuk aljabar	Tidak bisa membayangkan daerah yang dibatasi untuk dituliskan dalam daerah E
3.	Kesalahan menuliskan batas daerah	kesulitan menentukan batas atas dan batas bawah	Membayangkan bidang yang dibatasi oleh fungsi
4.	Kesalahan dalam melakukan perhitungan integral lipat tiga	Kesulitan untuk mengintegralkan	Ragu dengan perhitungan yang semakin panjang

Subyek 3 menggambarkan daerah yang diberikan tetapi tidak menuliskan batas integrasi dengan benar dan tidak melakukan perhitungan integrasi dengan benar. Kemampuan membaca atau memahami koordinat kartesius, Persamaan garis pada suatu grafik dalam menyelesaikan luas daerah masih rendah. Kesalahan ini sama halnya dengan yang disebutkan oleh Muchlis (2017). Hal ini mengindikasikan kesulitan dalam memvisualisasikan batas menjadi bentuk batas integral atau sebelumnya tidak memformulasikan daerah E . Ini menunjukkan kendala memahami hubungan antara bentuk visual dari tetrahedron dengan bidang-bidang yang membatasi daerah tetrahedron sebagai bagian dari sumbu x, y, z belum dipahami sepenuhnya.

Kendala memahami hubungan antara bentuk visual dari tetrahedron dengan bidang-bidang yang membatasi daerah tetrahedron mengindikasikan kurang memahami yang konsep-konsep yang berhubungan dengan materi prasyarat yaitu memformulasikan batas daerah di bawah kurva (Nasir, 2022). Hal ini selaras dengan pendapat bahwa memiliki pemahaman yang kuat tentang materi kalkulus baik kalkulus dasar dan kalkulus lanjut sangat penting (Aprizal, 2024). Selain itu ditemukan mahasiswa tidak menyelesaikan perhitungan dengan benar. Secara umum, pada kasus ini dapat disimpulkan menuliskan batas fungsi sebagai batas atas dan batas bawah tidak terhubung dengan memformulasikan daerah E . Selain itu ditemukan kesalahan dalam prosedur perhitungan sehingga hasil yang peroleh menjadi salah (Janan, 2022; Fahrudin, 2018).

Subjek 4

Dari hasil pengerjaan subjek 4 pada gambar 5 dapat dideskripsikan kesalahan dan kesulitan yang dilakukan oleh subjek 4 sebagai berikut.

Tabel 6 Hasil Analisis Tes dan Wawancara Subjek 4

Kesalahan yang terjadi	Kesulitan dari hasil tes	Kesulitan dari wawancara
1. Tidak menentukan interval bidang yang membatasi E dengan tepat	Kesulitan dalam menentukan dalam bentuk aljabar	Tidak bisa membayangkan daerah yang dibatasi untuk dituliskan dalam daerah E
3. Kesalahan menuliskan batas daerah z	kesulitan menentukan batas atas dan batas bawah	Ambil batas yang diberikan oleh soal
Kesalahan dalam melakukan perhitungan integral lipat tiga	Kesulitan untuk mengintegrasikan	Ragu dengan perhitungan y

Berikut adalah hasil pekerjaan subjek 4.

Diketahui $x = [0, 2]$, $y = [0, 2]$ dan $z = [0, 2]$

$$\iiint_E z \, dv = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 x + y + z - 2 \, dz \, dy \, dx$$

$$\int_0^2 \int_0^2 \left[x + y + \frac{z^2}{2} - 2z \right]_0^2 dy \, dx$$

$$\int_0^2 \int_0^2 \left[x + y + \frac{2^2}{2} - 2(2) \right] dy \, dx$$

$$\int_0^2 \int_0^2 [x + y - 2] dy \, dx$$

$$\int_0^2 \left[\frac{x + y^2}{2} - 2y \right]_0^2 dx$$

$$\int_0^2 \left[\frac{x + 2^2}{2} - 2(2) \right] dx$$

$$\int_0^2 [x - 2] dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^2 = \left[\frac{2^2}{2} - 2(2) \right] = \left[\frac{4}{2} - 4 \right] = -2$$

Jadi nilai dari $\iiint_E z \, dv$ adalah -2

Gambar 5 Hasil pekerjaan subjek 4

Subyek 4 tidak menuliskan batas integrasi dengan bentuk daerah E namun hasil fomulasinya tidak tepat yaitu $x = [0, 2]$, $y = [0, 2]$ dan $z = [0, 2]$ seharusnya menjadi $x = [0, 2]$, $y = [0, 2]$ dan $z = [0, 2 - x - y]$. Ini disebabkan oleh kendala memahami hubungan antara bentuk visual yang diberikan tetrahedron dengan bidang-bidang yang membatasi sebagai bagian dari sumbu x, y, z belum dipahami. Pada batas yang diberikan bentuk daerahnya menjadi kubus bukanlah tetrahedron. Kemudian, Subjek 4 tidak melakukan perhitungan integrasi dengan benar. Hal ini merupakan kesalahan prosedur (Janan, 2022; Fahrudin, 2018).

Kesalahan konsep yang sering dilakukan oleh mempelajari integral yakni, kesalahan dalam menentukan nilai batas, menghitung integral yang disebabkan oleh ketidaktelitian dalam menyelesaikan soal, tidak memahami konsep pengintegralan dan hanya menghafal konsep (Wahyuni, 2019). Selain itu ditemukan nilai akhir -2 yang mengindikasikan bahwa

kurangnya pemahaman luas daerah di bawah kurva maka terjadi kekeliruan dari perhitungan bahwa volume daerah yang diberikan bernilai -2. Hal ini merupakan konsep dasar yang penting dalam perhitungan daerah dibawah kurva satu variabel atau lebih. Nilai luas daerah di bawah kurva nilai negatif dan nilai 0 memiliki pengertian yang berbeda. Subjek 4 tidak peka pada kesalahan ini bahwa nilai yang diperoleh salah karena kurang ketelitian (Janan, 2022) kemudian tidak mengecek kembali daerah yang dihitung atapun batas-batas dari daerah yang dihitung. Kesalahan ini termasuk pada kesalahan prosedur (Fahrudin, 2018)

Subjek 5

Berikut adalah hasil pekerjaan subjek 5.

$$\begin{aligned}
 & z = x + y + z = 2 \\
 & z = 2 - x - y \\
 & y = x + y + z = 2 \quad \text{dgn } z = 0, x = 0 \\
 & x = 2 \\
 & x = x + y + z = 2 \quad y = 0, z = 0 \\
 & \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz dy dx \\
 & = \int_0^2 \int_0^{2-x} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{2-x-y} dy dx \\
 & = \int_0^2 \int_0^{2-x} \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y) \right) dy dx \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + 2xy^2 - 4xy - 2y^2 \right]_0^{2-x} dx \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[2x^2 + \frac{8}{3} - 8x - 8x - 8 \right] dx \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[2x^2 + \frac{8-24}{3} \right] dx \\
 & = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{16}{3} x \right]_0^2 \\
 & = \frac{1}{2} \left[\frac{16}{3} - \frac{32}{3} \right] \\
 & = \frac{1}{2} \left(-\frac{16}{3} \right) = -\frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

Gambar 6 Hasil pekerjaan subjek 5

Dari hasil pengerjaan subjek 5 pada gambar 6 dapat dideskripsikan kesalahan dan kesulitan yang dilakukan oleh subjek 5 sebagai berikut.

Tabel 7 Hasil Analisis Tes dan Wawancara Subjek 5

	Kesalahan yang terjadi	Kesulitan dari hasil tes	Kesulitan dari wawancara
1.	Tidak menentukan interval bidang yang membatasi E dengan tepat	Kesulitan menghubungkan bidang-bidang dari tetrahedron menjadi batas integral	Kesulitan menentukan batas dari daerah
2.	Kesalahan dalam melakukan perhitungan integral lipat tiga	Kesulitan untuk mengintegrasikan	Ragu dengan perhitungan yang semakin panjang

Subyek 5 menunjukkan bahwa mahasiswa dapat memformulasikan daerah E dengan tepat dalam bentuk aljabar. Subjek 5 menentukan interval bidang yang membatasi E dengan tepat sebagai batas dari integral lipat tiga. Namun, pada proses mengintegrasikan terjadi

kesalahan mensubstitusi z sehingga hasil perhitungan sampai hasil akhir menjadi salah. Kesalahan prosedur mengakibatkan kesalahan perhitungan akhir (Janna, 2022).

Hasil akhir yang diharapkan adalah $\frac{4}{3}$ tidak didapat. Kesalahan ini termasuk pada kesalahan prosedur dalam proses menghitung integral (Fahrudin, 2018). Kesulitan dalam memecahkan permasalahan pada konsep integral berkaitan erat dengan sudut pandang mahasiswa, sudut pandang mahasiswa akan meningkatkan atau melemahkan motivasi mahasiswa dalam mempelajari dan memecahkan masalah kalkulus. Mahasiswa yang berasumsi konsep dan soal sulit akan lebih cenderung lemah motivasinya dalam mempelajari dan memecahkan masalah kalkulus (Farhan, 2019).

PENUTUP

Berdasarkan hasil analisis pada hasil dan pembahasan dari penelitian diperoleh beberapa kesimpulan bahwa jenis-jenis kesulitan yang dialami mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan penerapan integral lipat tiga dapat dibagi menjadi 4 bagian dalam 2 kategori, yaitu:

a. Kesalahan dalam menghubungkan konsep untuk dapat menentukan daerah E .

Kesalahan ini mengindikasikan kesulitan dalam menghubungkan konsep geometri yaitu menggambarkan bidang-bidang yang diberikan secara tepat kemudian memformulasikan daerah E diberikan sehingga salah dalam menggambarkan daerah E . Kemudian kesulitan dalam menghubungkan daerah E dalam bentuk batas secara aljabar. Jenis kesalahan ini meliputi:

- (1) Kesulitan dalam menggambarkan daerah yang dibatasi dan menentukan titik potong yaitu tetrahedron pejal;
- (2) Kesulitan dalam menentukan batas integrasi dan dalam menentukan daerah dalam bentuk aljabar dari gambar.

b. Kesalahan dalam menerapkan konsep integral lipat tiga.

Kesalahan dalam menerapkan konsep integral lipat tiga terjadi karena kesalahan mengintegrasikan bentuk batas pada bidang z ataupun batas atas dan batas bawah pada bidang x dan y . Kesulitan penerapan konsep ini meliputi:

- (1) kesulitan dalam mengintegrasikan dengan bentuk batas fungsi,
- (2) kesulitan dalam melakukan perhitungan integral lipat tiga.

Berdasarkan hasil kesimpulan penelitian, kesalahan dalam pengerjaan soal kalkulus berubah banyak yaitu pada konsep penerapan integral lipat tiga mengindikasikan dibutuhkan pemahaman konsep pada mata kuliah parasyarat dan mata kuliah kalkulus berubah banyak untuk dapat mendukung kemampuan pemecahan masalah mahasiswa. Peneliti menyarankan dalam proses pembelajaran untuk mendukung kemampuan pemecahan masalah dapat digunakan bantuan media seperti bahan ajar, website, aplikasi ataupun kecerdasan buatan (*artificial intelligent*) yang memberikan interpretasi satu variabel hingga n variabel secara sehingga membantu mahasiswa dalam memvisualisasikan daerah dan dapat mengeksplorasi penyelesaian penerapan integral lipat tiga.

DAFTAR RUJUKAN

- Apriandi, D., & Krisdiana, I. (2016). *Analisis kesulitan mahasiswa dalam memahami materi integral lipat dua pada koordinat polar mata kuliah kalkulus lanjut*. Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika, 7(2), 123-134.
- Aprizal, F. M. (2024, May). *Pengaruh Self Confidence terhadap Hasil Belajar Mata Kuliah Kalkulus Diferensial pada Mahasiswa Pendidikan Matematika*. In Gunung Djati Conference Series (Vol. 40, pp. 82-92).

- Berggren, J. L. 2006. Calculus: Mathematics. Encyclopedia Britannica. Diakses dari <http://www.britannica.com/topic/calculus-mathematics>.
- Dewi, S. I. K. (2014). *Analisis kesalahan siswa kelas viii dalam menyelesaikan soal pada materi faktorisasi bentuk aljabar smp negeri 1 kamal semester gasal tahun ajaran 2013/2014*. MATHEdunesa, 3(2).
- Fahrudin, F. A. (2018). *Identifikasi Kesalahan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Kalkulus Peubah Banyak Berdasarkan Taksonomi Solo*. JPMI (Jurnal Pendidikan Matematika Indonesia), 3(1), 7-14.
- Farhan, M., & Zulkarnain, I. (2019). *Analisis kesalahan mahasiswa pada mata kuliah kalkulus peubah banyak berdasarkan Newmann's Error analysis*. Jurnal Kajian Pendidikan Matematika, 4(2), 121-134.
- Harel, G. (2013). Intellectual need. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education*. (pp. 119–151). Springer.
- Henra, K., Asnita, A. U., Riaddin, D., Resi, B. B. F., Setiawan, J., & Dahlan, T. (2021). *Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar*. Yayasan Penerbit Muhammad Zaini.
- Janan, T. (2022). *Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Persamaan dan Pertidaksamaan pada Mata Kuliah Kalkulus I*. Jurnal Pendidikan dan Konseling (JPDK), 4(5), 1266-1277.
- Kashefi, H., Ismail, Z., & Yusof, Y. M. (2012). *Designing a Blended Learning Model to Support Mathematical Thinking in Multivariable Calculus*. In *Outcome-Based Science, Technology, Engineering, and Mathematics Education: Innovative Practices* (pp. 221-239). IGI Global.
- Monariska, E. (2019). *Analisis kesulitan belajar mahasiswa pada materi integral*. Jurnal Analisa, 5(1), 9-19.
- Muchlis, E. E. (2017). *Analisis Kesalahan Mahasiswa pada Materi Integral Lipat di Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Bengkulu*. In *Seminar Matematika Dan Pendidikan Matematika UNY* (pp. 265-272).
- Noeruddin, A. (2014). *Implementasi model pembelajaran kooperatif tipe stad disertai pemberian umpan balik berbasis contextual teaching and learning (CTL) untuk meningkatkan hasil belajar mahasiswa pada mata kuliah kalkulus peubah banyak ikip pgri Bojonegoro*. Media Prestasi: Jurnal Ilmiah Stkip Pgri Ngawi, 13(1), 31-41.
- Nasir, R., Pathuddin, P., Meinarni, W., Alfisyahra, A., & Lebagi, D. (2022). *Peningkatan Partisipasi Mahasiswa melalui Implementasi Desain Didaktis Materi Integral Lipat Tiga Berbantuan GeoGebra dan Nearpod*. Jurnal Kreatif Online, 10(1), 85-94.
- Nasution, N. B. (2018). *Analisis Kesalahan Mahasiswa pada Materi Fungsi Dua Peubah dengan Newmann's Error Analysis (NEA)*. Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, 6(1), 21-32.
- Nurmalitasari, D. (2017). *Analisis Kesulitan Belajar Mahasiswa pada Mata Kuliah Kalkulus Peubah Banyak di STKIP PGRI Pasuruan*. JURNAL EDUCAZIONE: Jurnal Pendidikan, Pembelajaran Dan Bimbingan Dan Konseling, 5(1), 27-35.
- Salsabila, Y., & Pujiastuti, H. (2022). *Analisis Pemahaman Konsep Matematis Mahasiswa Dalam Pembelajaran Daring Pada Mata Kuliah Kalkulus Peubah Banyak*. Proximal: Jurnal Penelitian Matematika Dan Pendidikan Matematika, 5(2), 97-105.
- Sholikah, A. U., & HW, S. (2017). *Analisis Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika Dalam Menyelesaikan Soal Kalkulus Peubah Banyak Di Universitas Muhammadiyah Surakarta*.
- Supriadi, A. (2021). *Pemahaman Mahasiswa Tentang Integral Lipat Dua Berdasarkan Teori APOS*. Indiktika: Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika, 4(1), 55-63.
- Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). *Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties*. ZDM–Mathematics education, 53(3), 507-519.

- Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). *Does the understanding of variable evolve through schooling?* In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Education* (Vol. 4, pp. 273–280). PME.
- Wahyuni, A., Kurniawan, P., Waluya, S. B., & Cahyini, A. N. (2019). *Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Integral*. Seminar Nasional Edusaintek FMIPA UNIMUS (pp. 623-629). Semarang: FMIPA Universitas Muhammadiyah Semarang.